Vectoranalyse, 2002/2003

Tentamen, 4 juli 2003, 14:00-17:00

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je naam en je studentnummer.
De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}.$$

1. (6) Bepaal met behulp van Lagrange multiplicatoren de extrema van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = 32x - y^2$ onder de conditie $y = x^2$.

2. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \sin\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^x\right) \\ z \cos\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^x\right) \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) (2) Laat C_ε de lus zijn in het xy-vlak bestaand uit rechte lijnstukken van $(0,0,0)$ naar $(\varepsilon,0,0)$ naar $(\varepsilon,\varepsilon,0)$ naar $(0,\varepsilon,0)$ naar $(0,0,0)$. Bepaal

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

   (b) (2) Laat Ω_δ de bol zijn rond $(0,0,0)$ met straal δ. Bepaal

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^3} \int\!\!\int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

3. Beschouw de afbeelding $T : [1,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$T(u,v) = (u\cos 4v, u \sin 4v).$$

   (a) (2) Schets het beeld A van T.

   (b) (3) Is $T : [1,2] \times [0,\pi] \to A$ bijectief (1-1 en op)?

   (c) (3) Bereken

$$\int\!\!\int_A \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

4. Laat de torus T geparametriseerd zijn door

$$\Phi(\theta, \varphi) = ((4 + \cos\varphi)\cos\theta, (4 + \cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi)$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Laat

$$S = \Phi([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]),$$
$$C_1 = \Phi(\{0\} \times [0, 2\pi]),$$
$$C_2 = \Phi(\{\frac{\pi}{2}\} \times [0, 2\pi]).$$

(a) (4) Bereken de oppervlakte van S.

(b) (1) Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2.$$

Laat zien dat

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1\}.$$

(c) (3) Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{V} = \nabla f \times \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ (4 - \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Bereken of beredeneer dat $\mathrm{rot}(\mathbf{V}) \cdot \nabla f = 0$.

(d) (2) Bereken $\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$.

(e) (1) Bereken $\int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$.

(f) (3) <u>Beredeneer</u> de waarde van $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ met C zoals in figuur 1.

(g) (4) Laat $E_1 = \Phi([0, 2\pi] \times \{\frac{\pi}{2}\})$ en laat E_2 het beeld van de afbeelding $\theta \mapsto \Phi(\theta, \frac{\pi}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta)$ met $\theta \in [0, 2\pi]$ zijn (zie figuur 2). Bereken of beredeneer $\int_{E_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ en <u>beredeneer</u> de waarde van $\int_{E_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$.

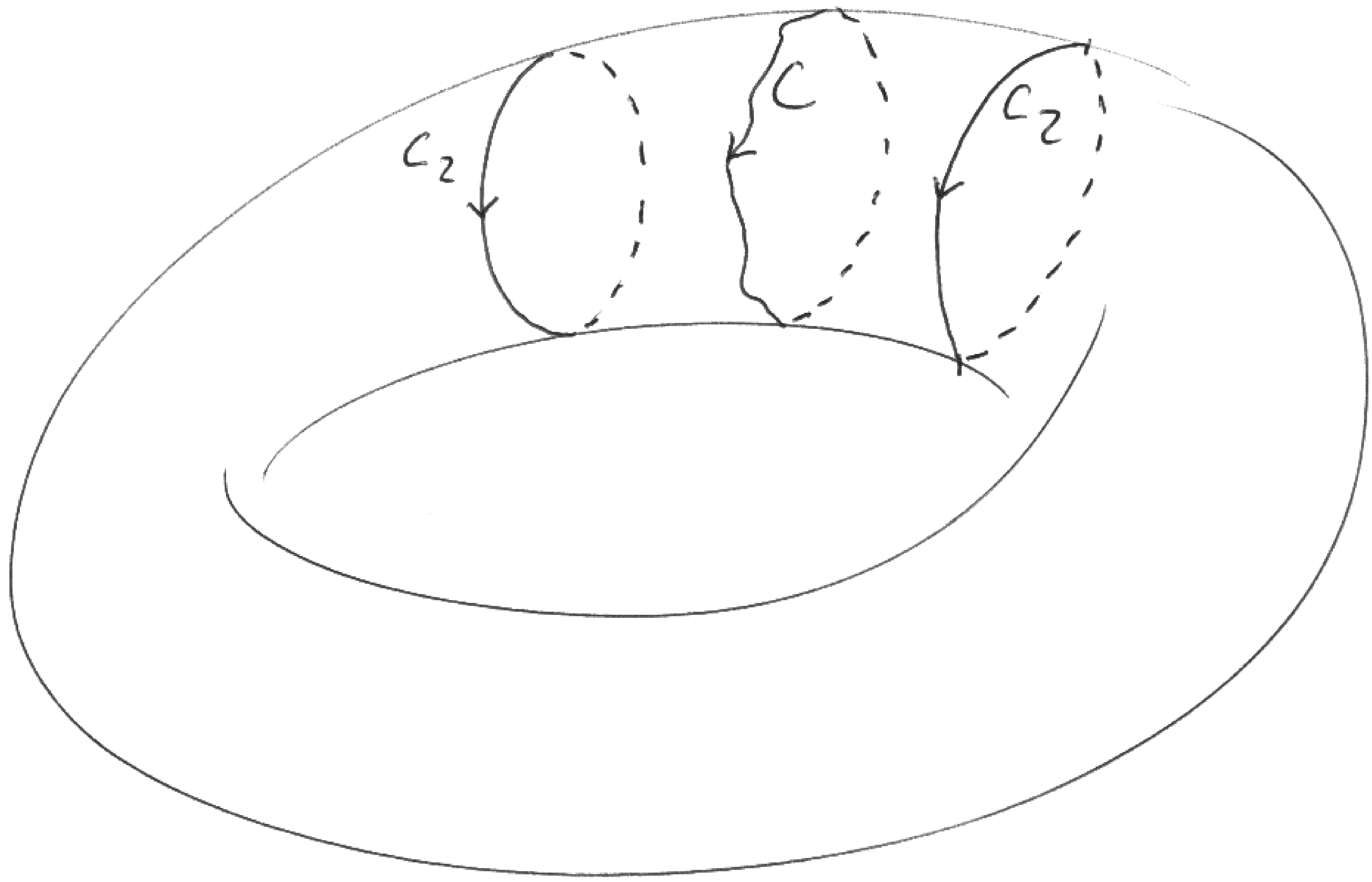


Fig 1: Torus met lussen C_1, C_2, C.

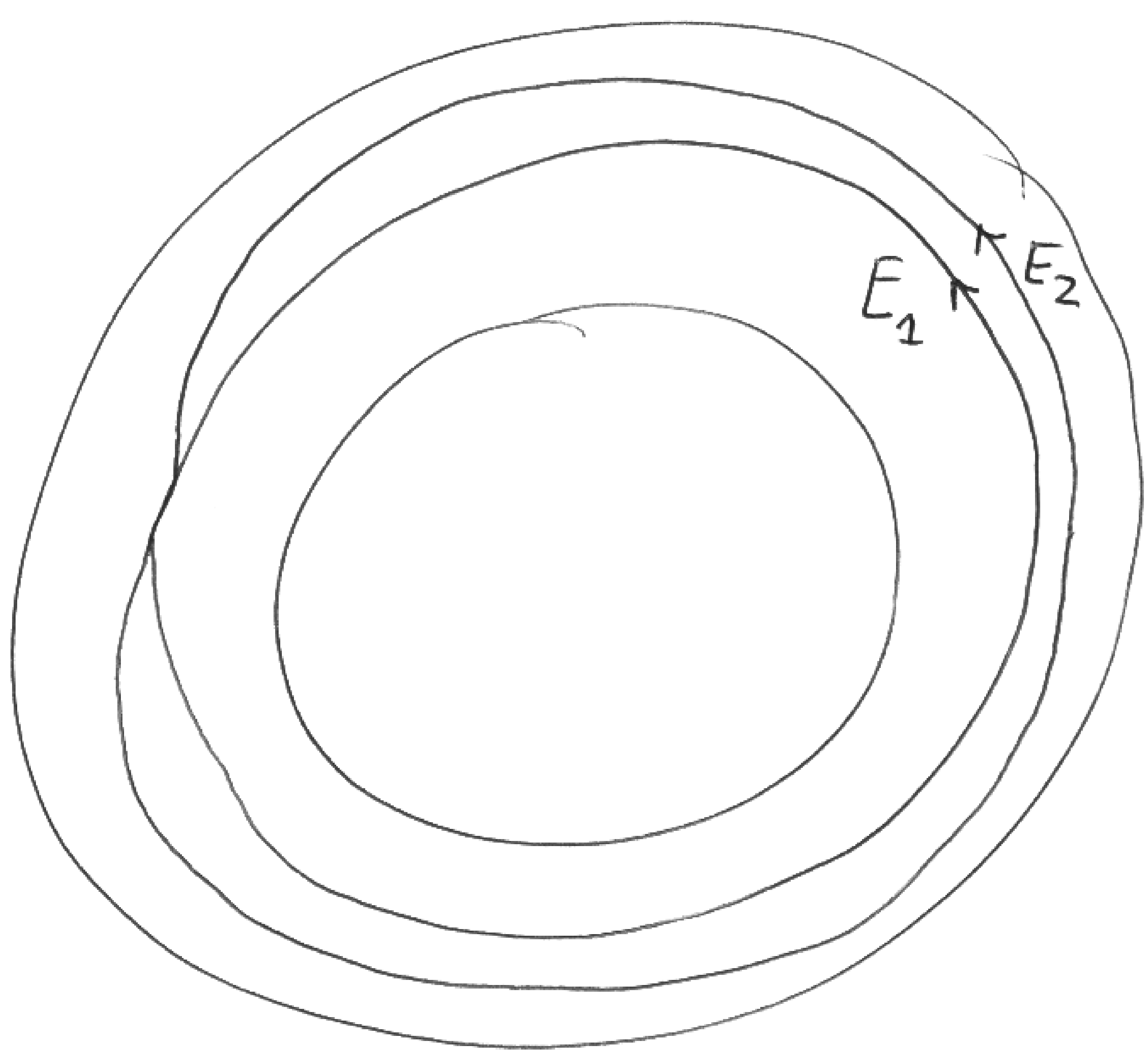


Fig 2: Boven aanzicht torus met lussen E_1 en E_2.

Woonplaats: 9616 TK Scharmer | Jaar van eerste inschrijving: 2002 | Naam docent: Martens

b

1 $f(x,y) = 32x - y^2$

$g(x,y) = y - x^2 = 0$

$\nabla f = (32, -2y)$

$\nabla g = (-2x, 1)$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$\left.\begin{array}{l} 32 = -2\lambda x \\ -2y = \lambda \\ y - x^2 = 0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} 32 = 4xy \\ y = x^2 \end{array}\right\}$

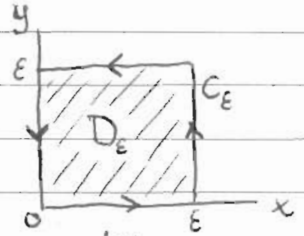
$32 = 4x^3 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

$y = x^2 = 2^2 = 4$

Extreme waarde wordt bereikt in $(2,4)$; hier is

$f(2,4) = 32 \cdot 2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

2a $F = \begin{pmatrix} y \sin\left(\frac{\pi}{2} e^x\right) \\ z \cos\left(\frac{\pi}{2} e^x\right) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$



$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1

$\int_{C_\varepsilon} F \cdot ds = \iint_{D_\varepsilon} (\operatorname{curl}(F) \cdot n)\, dx\, dy = \iint_{D_\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy =$

$\iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\, dy = \iint_{D_\varepsilon} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} e^x\right) + z \cos\left(\frac{\pi}{2} e^x\right) \cdot \frac{\pi}{2} e^x \right) dx\, dy$

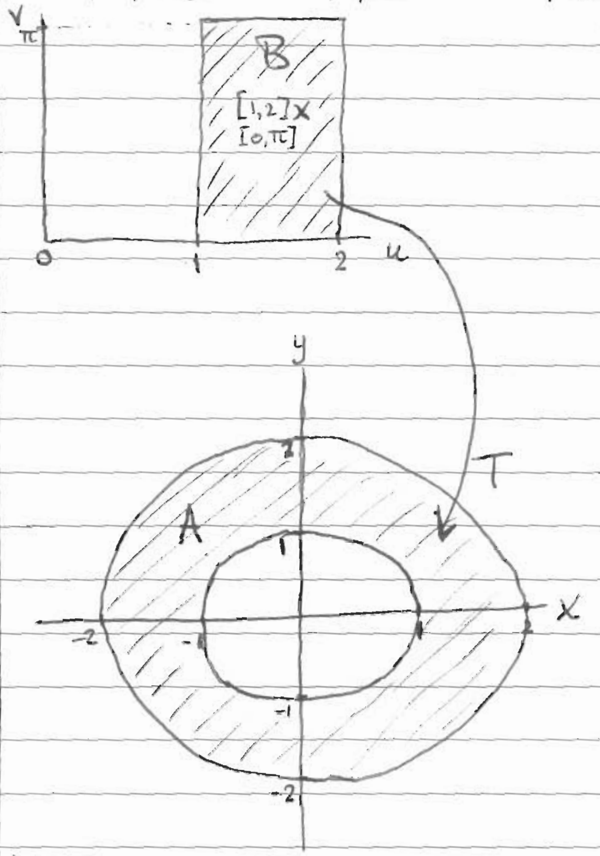
Postcode en

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving:

3a $T: [1,2]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$T(u,v) = (u \cos 4v,\ u \sin 4v)$

2



b Nee, want T is niet injectief: bijvoorbeeld

3 $T(1, 0) = T(1, \frac{1}{2}\pi) = (1, 0)$

De 'ring' A wordt door T twee keer overdekt

c $\iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_B e^{-x^2-y^2}\,|J(T)|\,du\,dv$

2

$-x^2-y^2 = -u^2\cos^2 4v - u^2 \sin^2 4v = -u^2(\cos^2 4v + \sin^2 4v) = -u^2$

$J(T) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos 4v & -4u \sin 4v \\ \sin 4v & 4u\cos 4v\end{pmatrix}$

$= 4u\cos^2 4v + 4u \sin^2 4v = 4u(\cos^2 4v + \sin^2 4v) = 4u$

$|J(T)| = |4u| = 4u$ voor $u \in [1,2]$

anders niet bijectief?

$\iint_B e^{-x^2-y^2}\,|J(T)|\,du\,dv = \iint_B e^{-u^2}\,4u\,du\,dv = \int_0^{\pi/2}\left[\int_1^2 e^{-u^2}\,4u\,du\right]dv =$

$= \int_0^{\pi}\left[-2\int_1^2 e^{-u^2}\cdot(-2u)\,du\right]dv = \int_0^{\pi}\left[-2\left[e^{-u^2}\right]_{u=1}^{u=2}\right]dv = \int_0^{\pi} -2(e^{-4}-e^{-1})\,dv =$

$= -2\pi(e^{-4}-e^{-1})$

$\underbrace{(\sqrt{x^2+y^2}+6-\sqrt{x^2+y^2}-6)}_{0} = 0$

4a $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$T_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$
$$T_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)$$

$$\Phi(\theta, \varphi) = (x, y, z) = \big((4+\cos\varphi)\cos\theta,\ (4+\cos\varphi)\sin\theta,\ \sin\varphi\big)$$

$$T_\theta = \big(-(4+\cos\varphi)\sin\theta,\ (4+\cos\varphi)\cos\theta,\ 0\big)$$
$$T_\varphi = \big(-\sin\varphi\cos\theta,\ -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\big)$$

$$A(S) = \iint_S \|T_\theta \times T_\varphi\|\, d\theta\, d\varphi$$

$$T_\theta \times T_\varphi = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -(4+\cos\varphi)\sin\theta & (4+\cos\varphi)\cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} (4+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\theta \\ (4+\cos\varphi)\sin\theta\cos\varphi \\ (4+\cos\varphi)\sin\varphi\sin^2\theta - (4+\cos\varphi)(4-\sin\varphi)\cos^2\theta \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} (4+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\theta \\ (4+\cos\varphi)\sin\theta\cos\varphi \\ -(4+\cos\varphi)(4-\sin\varphi) \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\|T_\theta \times T_\varphi\| = \sqrt{(4+\cos\varphi)^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + (4+\cos\varphi)^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + (4+\cos\varphi)^2(4-\sin\varphi)^2}}$$
$$\cancel{= (4+\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi + (4-\sin\varphi)^2}}$$
$$\cancel{= (4+\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi + (4-\sin\varphi)^2}}$$
$$\cancel{= (4+\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi + 16 - 8\sin\varphi + \sin^2\varphi}}$$
$$\cancel{= (4+\cos\varphi)\sqrt{17 - 8\sin\varphi}}$$

$$= \begin{pmatrix} (4+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\theta \\ -(4+\cos\varphi)\cos\varphi\sin\theta \\ (4+\cos\varphi)\sin\varphi\sin^2\theta + (4+\cos\varphi)\sin\varphi\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (4+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\theta \\ -(4+\cos\varphi)\cos\varphi\sin\theta \\ (4+\cos\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

5

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = \sqrt{(4+\cos\varphi)^2\cos^2\varphi\cos\theta + (4+\cos\varphi)^2\cos^2\varphi\sin\theta + (4+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi}$$
$$= (4+\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi\cos\theta + \cos^2\varphi\sin\theta + \sin^2\theta}$$
$$= \dots$$

Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: Naam docent:

b
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)^2+z^2 \\ &= \left(\sqrt{(4+\cos\varphi)^2\cos^2\theta+(4+\cos\varphi)^2\sin^2\theta}-4\right)^2+\sin^2\varphi \\ &= \left(\sqrt{(4+\cos\varphi)^2}-4\right)^2+\sin^2\varphi \\ &= (4+\cos\varphi-4)^2+\sin^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi+\sin^2\varphi \\ &= 1 \end{aligned}$$

1

~~[illegible]~~

~~c ∇f staat loodrecht op het T, omdat T een niveauvlak van f is. (y,4x,0) ligt in het xy-vlak.~~

c
$$\operatorname{rot}(V)=\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ xz & yz & \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot 2$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}yz-\frac{\partial}{\partial y}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}-\frac{\partial}{\partial z}xz \\ \frac{\partial}{\partial y}xz-\frac{\partial}{\partial x}yz\end{pmatrix}\cdot 2$$

$$=\begin{pmatrix} y-\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2} \\ \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}-x \\ 0\end{pmatrix}\cdot 2$$

3

$$=\begin{pmatrix} -\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y \\ \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2x \\ 0\end{pmatrix}\cdot 2$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{-8y}{\sqrt{x^2+y^2}}+6y \\ \frac{8x}{\sqrt{x^2+y^2}}-6x \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\operatorname{rot}(V)\cdot\nabla f=\left(-\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\right)2\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(V)\cdot\nabla f &= \left(\frac{-8y}{\sqrt{x^2+y^2}}+6y\right)2\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+ \\ &\quad \left(\frac{8x}{\sqrt{x^2+y^2}}-6x\right)2\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= 2xy\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\underbrace{\left(\frac{8}{\sqrt{x^2+y^2}}+6-\frac{8}{\sqrt{x^2+y^2}}-6\right)}_{0}=0\end{aligned}$$

1

d $C_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$C_1(\varphi) = (4+\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi)$

$$\int_{C_1} V\cdot ds = \int_{C_1} V \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{C_1} V_1\,dx + V_2\,dy + V_3\,dz$$

$$\nabla C_1(\varphi) = \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}, \frac{dz}{d\varphi}\right) = (-\sin\varphi,\ 0,\ \cos\varphi)$$

$dx = -\sin\varphi\ d\varphi$

$dy = 0$

$dz = \cos\varphi\ d\varphi$

$$\int_{C_1} V\cdot ds = \int_0^{2\pi} (V_1\cdot(-\sin\varphi) + V_3\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2(4-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}\cos\varphi - 2xz\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2(4-(4+\cos\varphi))(4+\cos\varphi) - 2(4+\cos\varphi)\sin^2\varphi\right]d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2(4+\cos\varphi)(-\cos\varphi - \sin^2\varphi)\right]d\varphi$$

$= \ldots$

4g $\int_{E_1} V\cdot ds$ zal 0 zijn. Omdat in de verzameling E_1 φ constant is, is dz gelijk 0 en speelt de derde component van V geen rol. De eerste twee componenten zijn oneven en heffen zichzelf dus op als ze over E_1 geïntegreerd worden. De uitkomst van de integraal is dus 0.